# MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM

**CABRAL[1], Rafayane Barros; GOULART[2], Claudiney**

**Universidade Federal de Goiás - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Campus Jataí**
**rafayaneb@hotmail.com**

**Resumo:**
Foi investigado assuntos envolvendo matemática e música, sugerindo resolução de problemas musicais com o auxílio da matemática, de modo que os alunos estabeleçam relações entre a Matemática e Música. Abordamos Frações, funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas, Progressão Geométrica e Mínimo Múltiplo Comum, propondo um trabalho diversificado. Com este estudo, foi possível perceber o quanto a matemática está ligada a música e despertará a curiosidade e o interesse do aluno na matemática quando se insere a música no contexto. Estudos comprovam que através da música pode-se até curar determinadas doenças, ajudar o aluno a melhorar sua autoestima, socializar-se melhor, contribuir para o seu aprendizado, aumentando sua capacidade de concentração, dentre outros benefícios. Destacamos alguns fatos históricos, relacionamos o Som e a Trigonometria, a Matemática e a Música, definimos alguns elementos básicos da Teoria musical, ressaltamos algumas contribuições de Euler no campo da Matemática e a Teoria Musical e sugerimos uma estratégia de trabalho em sala de aula utilizando a Teoria musical como motivação.

**Palavras-chave**: música, matemática, aprendizagem, ondas, som.

## Introdução

Em 2009, desenvolvi um projeto chamado *Coral Escolar*, que teve duração de 2 anos, com esse trabalho pude observar que os alunos envolvidos nesse projeto começaram a fazer conexões entre a Matemática e a Música, assim quando fiz minha especialização pude registrar essa experiência em meu trabalho.

GARDNER (2007) relata que pessoas talentosas em termos matemáticos frequentemente manifestam um considerável interesse pela música, talvez isso aconteça porque a música se apresenta como um campo extremamente fértil para a mente matemática.

[1] Mestre em Matemática - concentração no Ensino da Matemática
[2] Doutor em Matemática - concentração em Equações Diferenciais e Parciais

A relação entre a Música e a Matemática existe desde a antiguidade, identificada nos estudos pitagóricos sobre a Música, de acordo com ABOUNUR (2003), fato de fundamental importância para sua evolução. Observamos que alunos que praticam Música, apresentam um grande esforço em destacar-se em outras áreas do conhecimento, não apenas em Matemática (Bastian, 2009). Dessa forma, nota-se que é interessante explorar problemas envolvendo Música como uma ferramenta para o aprendizado da Matemática.

Estudos comprovam que alunos que estudam música podem ter sua inteligência ampliada. BASTIAN (2009) fez um experimento com alunos da educação básica num período de 4 anos e aqueles que foram submetidos a educação musical expandida tiveram um desempenho no teste de QI (111) superior ao dos alunos que não usufruíram de uma educação musical durante o período QI (105).

Alguns aspectos históricos na evolução da Música, bem como a sua relação com a Matemática, serão abordados, sendo feita uma relação entre a trigonometria e som e, entre a Matemática e Música.

Serão destacadas algumas definições acerca da Teoria Musical, ressaltando na sequência algumas importantes contribuições de Euler no campo da Matemática relacionada Música, em seguida faremos algumas sugestões para o trabalho da Matemática inserida na Música, bem como algumas sugestões de atividades que podem ser feitas em sala de aula ou extraclasse, tendo a Música como motivação para ensino de diversos conceitos matemáticos.

## Breve Contexto Histórico

Não se sabe ao certo o início das primeiras manifestações musicais, mas um registro bastante antigo é o Salmo 51 de Davi, registrado por volta do século X a.C., pois os Salmos era uma maneira do povo de Israel louvar à Deus.

ABDOUNUR (2003) relata que um osso de urso com idade entre 43.000 e 82.000 anos encontrado em 1995 nos Alpes da Eslováquia, apresentava buracos que produziam sons que possuíam elementos fundamentais da atual escala diatônica. Porém os primeiros registros de notações musicais foram entre os séculos IV e V conforme TEIXEIRA (2015). Os neumas possibilitavam ao cantor conhecer a direção da melodia, mas não indicavam com precisão as notas, foram se desenvolvendo graficamente no decorrer do século IX ao XIII.

Os primeiros indícios da existência de relações entre a Matemática e a Música ocorreu por volta do século VI a.C., na escola Pitagórica, estes pensadores relacionaram intervalos musicais com o conceito matemático de frações afirma ABDOUNUR (2003). Pitágoras, por sua vez, almejava entender o que chamamos hoje em dia de harmonia. SALTOY (2003), comenta que a busca pela harmonia cósmica já era objeto de estudo de inúmeros cientistas da idade Média. Da antiguidade até o Renascimento, conhecia-se sete planetas, nesse sentido, Pitágoras definiu a conceito de harmonia das esferas, coincidindo com sete sons harmônicos.

De acordo com ABDOUNUR (2003) os gregos desenvolveram o tetracordes e depois uma escala com sete tons, Pitágoras, Arquidas, Aristoxeno, Eristóstenes desenvolveram diferentes critérios de afinidade. Eristótenes elaborou a diferenciação entre intervalos calculados aritmeticamente entre 284 e 202 a.C., entre muitos outros registros pertinentes a Matemática e Música.

JULIANI (2003) destaca que os chineses desenvolveram desde os tempos antigos as sequências pentatônica contendo a partir do Dó, Ré, Mi, Sol e Lá, que corresponde as 5 primeiras notas do ciclo das quintas, comparadas aos cinco elementos da filosofia natural: água, fogo, madeira, metal e terra.

**Funções Trigonométricas e o Som**

Pitágoras foi pioneiro em estabelecer relações entre a matemática e a música, ao realizar experimentos com uma corda, percebendo que o som produzido representava uma determinada fração do som original. A partir daí conseguiu organizar uma escala musical (século VI a.c.) (PAPADOULOS, 2014).

O movimento de um ponto P sobre uma circunferência de raio 1 no sentido anti-horário, seu percurso pode ser determinado por uma função seno, o qual tem valor máximo em y = 1.

Enquanto o tempo t varia de 0 a 1 segundo, o ângulo $\alpha$ varia de 0 a $2\pi$, ou seja, o ponto P completou um ciclo em um segundo. O número de ciclos realizados em um segundo, denominamos *frequência*.

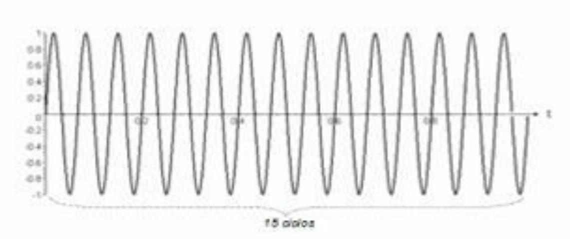
Linck (2010) desenvolveu um modelo matemático que mostram que as notas musicais podem ser representadas por ondas senoidais, que se define pela seguinte fórmula geral:

$Y = A \,.\, sen\,(bx + c)$

Temos que Y é a variação da pressão; A é a amplitude máxima da onda, $b = 2\pi f$; onde f é a frequência,x representa o tempo em segundos e c a fase, que se trata do momento em que a curva senoide se inicia. Dessa forma podemos reescrever a fórmula:

$Y = A \,.\, sen(2\pi fx + c)$

Vejamos o gráfico de uma frequência de 15 Hz:

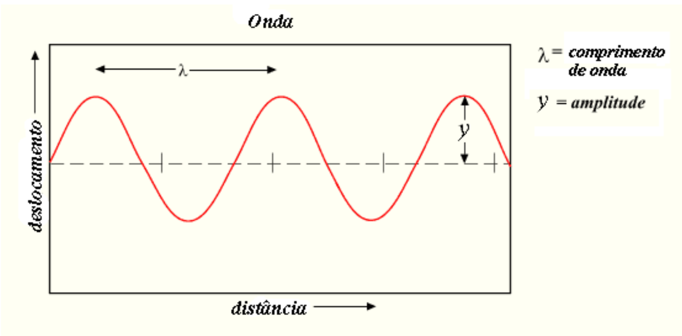



*Fonte: SOUZA, Luciana Gastaldi e Sardinha, et al, Matemática e Música: Relações e suas implicações no Ensino da Matemática*

Assim pode-se relacionar a frequência com algumas notas musicais, por exemplo o lá central que possui uma frequência de 440 Hz[3]. Dessa forma é importante entender o que é o som. O Som é uma onda longitudinal que se propaga através da matéria, seja sólido, líquido ou gasoso, o qual não pode ser percebido caso não haja um meio material.

É importante destacar suas propriedades. A intensidade é a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco, a Altura é a propriedade que o som tem de ser mais grave ou agudo e o Timbre é a qualidade do som (LINK, 2010).

A amplitude é a altura da onda em relação ao seu ponto médio, que nada mais é que a intensidade do som. A frequência é o número de vezes que uma onda completa seu movimento e volta ao seu estado inicial dentro de uma determinada unidade de tempo, que pode ser dada em Hertz (Hz), ou seja, ela está associada com a rapidez com que uma onda se propaga, conforme (MORAIS, 2008).




*Fonte: https://anasoares1.wordpress.com/*

Ratton (2002), citado por Link (2010) destaca que o ouvido humano só capta sons entre 20 a 20.000 Hz, de modo que os sons entre 20 e 200 Hz são ditos graves e sons entre 5.000 a 20.000 Hz são ditos agudo. Os sons entre 200 e 500 Hz são chamados de sons intermediários. Chamamos de infrassons aqueles abaixo de 20 Hz e ultrassons aqueles acima de 20.000 Hz.

---

[3]O Lá$_4$ com frequência de 440 Hz, é o mais utilizado na afinação de instrumentos.

O timbre, como já foi dito anteriormente, é a qualidade do som, permitindo que façamos a distinção de uma mesma nota ao ser tocada em um piano ou em um violão, conforme MED (1996). Por exemplo, formas arredondadas de ondas em gráficos da função seno produzem timbres mais suaves e formas mais pontiagudas produzem sons mais estridentes.

Temos que uma série de frequências sonoras produzem a característica que nos permite reconhecer a fonte do som, essa série é denominada série harmônica. Conforme [8], ao ouvirmos uma nota, podemos identificar também uma série de outras frequências secundárias mais agudas, que não perceberemos sozinhas, esse conjunto de sons define o timbre de cada instrumento.

Segundo MED (1996), série harmônica é o conjunto de sons que acompanham um som fundamental, *som gerador, som principal*. Em uma série harmônica os intervalos que a formam começam com oitavas justas e ficando sempre menores, ou seja:

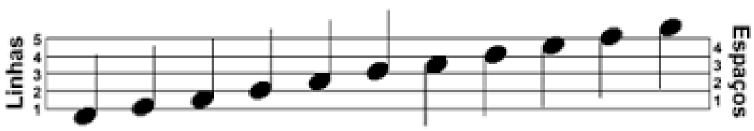
8ª J - 5ª J - 4ª J - 3ª M - 3ª m - 3ª m - 2ª M - 2ª M - 2ª M - 2ª M - 2ª m ...

Os harmônicos da série soam com intensidades diferentes em cada instrumento, ressalta MED (1996), porém nenhum instrumento produz um som puro, o diapasão fornece um som mais limpo que as demais formas de som.

**Teoria da Música**

Para estabelecer relações entre a Matemática e a Música é importante que sejam definidos alguns elementos da Música.

Em MED (1996) é definido que o pentagrama é a disposição de cinco linhas paralelas horizontais e quatro espaços, onde é possível escrever as notas musicais, contam-se as pautas e as linhas de baixo para cima.



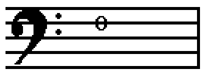

*Fonte: http://www.sotutorial.com/index.php/tutoriais-teorial-musical/teoria-musical-003-pentagrama/*

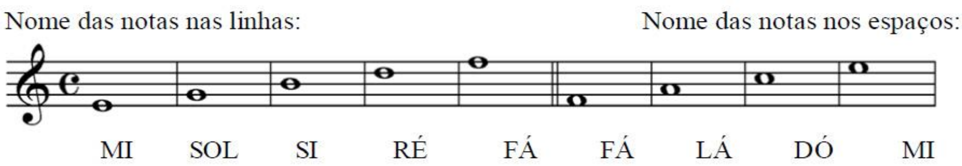
Conforme TEIXEIRA (2015) a música é representada por figuras chamados notas, as quais variam de acordo com a duração do som e silêncio, e recebem nomes distintos:

| Som | Pausa | Nome e Duração |
|---|---|---|
| | | Semibreve - 4 tempos |
| | | Semínima - 2 tempos |
| | | Mínima - 1 tempo |
| | | Colcheia - 0,5Tempos |
| | | Semicolcheia - 0,25 tempos |
| | | Fusa - 0,125 tempos |
| | | Semifusa - 0,0625 tempos |

*Fonte: http://julianajaremczuk.blogspot.com.br/2013/07/partitura.html*

A palavra clave vem do latim que significa chave, atualmente utiliza-se três tipos de claves:

| | | |
|---|---|---|
|  |   |  |
| *A clave de Sol marca seu lugar da nota sol na segunda linha. Fonte: http://julianajaremczuk.blogspot.com.br/2013/07/partitura.html* | *A clave de Fá marca seu lugar da nota fá na 4ª linha. Fonte: http://www.geocities.ws/asomatica/Teoria/ApostilaII.htm* | *A clave de Dó indica a colocação da nota dó. Fonte: http://www.fotolog.com/celofane/68093156/* |




*Fonte: https://incentivomusical.wordpress.com/tag/pentagrama/*

O semitom é o menor intervalo entre dois sons consecutivos quaisquer, dessa forma a soma de dois semitons teremos um tom. Assim podemos definir os acidentes, são eles:

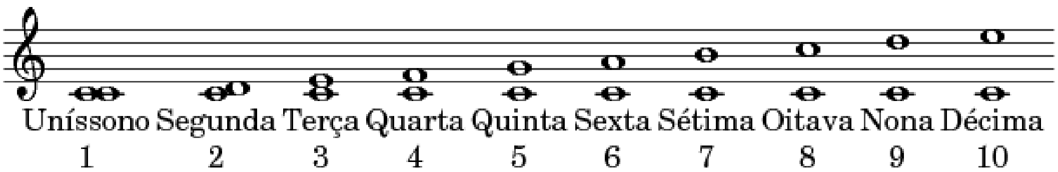
- Sustenido: eleva a altura da nota em um semitom, analogamente o dobrado sustenido eleva um tom inteiro e o triplo sustenido três semitons;
- Bemol: abaixa a altura da nota em um semitom, analogamente o dobrado bemol abaixa um tom inteiro e o triplo bemol três semitons;
- Bequadro: anula o efeito dos acidentes anteriores, sustenido ou bemol.

O Sistema Natural define com precisão o número de vibrações para cada nota e as relações entre elas (Pereira, 2013). Temos que o Coma é a nona parte de um tom, por exemplo: entre Dó e Ré existem 9 comas, entre Dó e Dó# são 5 comas e entre o Ré*b* e Ré também são 5 comas, logo Dó# ≠ Ré*b*, já no Sistema Temperado essa diferença é eliminada, ou seja, entre Dó e Dó# são 4,5 comas e entre o Ré*b* e Ré também são 4,5 comas, assim teremos Dó# = Ré*b*.

Intervalo é a diferença de altura entre dois sons, a relação existente entre duas alturas, ou ainda, o espaço que separa um som do outro. É importante estabelecer sua classificação, temos intervalos de:

| | |
|---|---|
| 1ª | Dois sons com o mesmo nome e mesma altura. |
| 2ª | Menor é composto por um semitom e o maior é composto por um tom. |
| 3ª | Menor é composto por um tom e 1 semitom e o maior é composto por dois tons. |
| 4ª | Justa é formado por dois tons e um semitom e o maior é por 6 semitons ou 3 tons. |
| 5ª | Justa é composto por 3 tons e um semitom |
| 6ª | Menor é composto por 3 tons ou 2 semitons e o maior é por 4 tons e um semitom. |
| 7ª | Menor é composto por 4 tons e 2 semitons e o maior é composto por 5 tons e 1 semitons. |
| 8ª | Justa é composto por 5 tons e 2 semitons. |

***Intervalos***




*Fonte: http://professorwagnerluciano.blogspot.com.br/*

Esses intervalos apresentados são todos simples, aqueles intervalos que possuem mais de oito notas, ou seja, com mais de 6 tons, são chamados de intervalos compostos.

## Música e Matemática

No século IX, Guido d'Arezzo, um monge italiano, fez a classificação dos sons, retirando de um hino a São João Batista em latim, o seguinte esquema (Morais, 2008):

*“**UT** queant laxix **RE**sonare fibris **MI**ra gestorum **FA**muli tuorum, **SOL**ve polluti **LA**bii reatum. **S**ancte **I**oannes. ”*

Porém no século XVI Giusepe Doni, músico italiano, propôs mudar Ut para Dó, para facilitar a pronúncia, sendo sete notas musicais, podendo variar de acordo com a altura, por exemplo, o Lá central possui uma frequência de 440 Hz, o Lá com uma oitava abaixo possui uma frequência de 220 Hz, já o Lá com uma oitava acima do lá central possui uma frequência de 880 Hz, ou seja, toda sequência de oitavas de uma nota específica é uma P.G. (Progressão Geométrica)[4] de razão 2.

Para MED (2009) a música é a arte de combinar sons simultânea e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo, mas PEREIRA (2013) ressalta que a música é uma sucessão de som e silêncio organizada ao longo do tempo, a qual possui melodia, harmonia e ritmo. A melodia é o conjunto de sons apresentados de forma sucessiva, na harmonia os sons se apresentam de forma simultânea e o ritmo é a ordem e a proporção que os sons são apresentados.

Pensando nisso, observamos que escala musical com sete notas repetirá a primeira nota no oitavo som, porém, mais agudo, mas a escala musical de Pitágoras não possuía a mesma distância entre as notas, de modo a medida que os sons evoluíam, não havia uma repetição com a mesma proporção, assim trata-se de uma escala em espiral, e não cíclica, o que dificulta a transposição de músicas para outros tons, além de nunca se coincidir com o ciclo das quintas, que trata-se de um ciclo com intervalos de quintas justas (formada por 3 tons e um semitom) entre as notas. Por exemplo, entre dó e sol há um intervalo de quinta justa, entre sol e ré também, e assim por diante.

Euler havia percebido que na divisão aritmética feita por Pitágoras, utilizando o Percurso da Quintas, teríamos que percorrer 12 quintas para obter 7 oitavas exatas (Camargos, 2010), mas isso só é verdade se estivermos falando de uma escala musical temperada, pois $3^{12} \neq 2^{19}$, do contrário teríamos $\frac{3^n}{2^n} = 2^p$, com n = 12 e p = 7, o que é um absurdo, pois para $3^n = 2^{p+n}$, não é possível encontrar uma solução inteira.

Com isso fez-se necessário a criação da escala temperada, que se trata da divisão das notas de uma escala musical com a mesma distância entre os sons, acarretando numa leve desafinação, porém, para alguns pitagóricos da época, a música deixaria de ser sagrada e passaria a ser humana. Dessa forma as sete notas passariam para 12 notas, as 7 notas naturais mais 5 acidentes.

Para se ter um valor preciso dessa divisão dos intervalos, foi feito o seguinte cálculo: se o Dó central equivale a 1, o Dó uma oitava a cima teria o dobro da sua altura, assim, se são 12 intervalos, teremos $i^{12} = 2$, o que nos dá aproximadamente i = 1,0594631, tornando mais fácil a transposição de músicas para o tom desejado.

---

[4] Uma P.G. é uma sequência de números que cada termo, começando pelo segundo, é igual ao produto entre termo anterior e uma constante, chamada de razão da progressão geométrica.

Perceba que para encontrar uma frequência em relação ao Dó central por exemplo, basta multiplicar a fração que correspondente àquela nota. A nota Dó possui uma frequência aproximada de 264 Hz, para obter a frequência de Fá dentro da mesma oitava basta multiplicar 264 por 4/3.

Essas relações são muito utilizadas por fabricantes de instrumentos musicais, explica JULIANI (2003), mesmo sem saberem o motivo, entendem a sua importância.

**Euler e a Música**

Utilizando a Teoria Musical, Euler tenta mostrar que é possível utilizar números para se obter intervalos consonantes, e encontrar um critério para separar consonâncias de dissonâncias (Knobloch, 2008). Dessa forma Euler definiu um grau de afabilidade d (n) para cada número natural.

Seja $n = {p_1}^{a_1}.{p_2}^{a_2}.{p_3}^{a_3} \dots {p_m}^{a_{m1}}$, temos que d(n) = $a_1(p_1$ - 1) + ::: + $a_m(p_m$ - 1) + 1

O que Euler ainda precisava era de aplicabilidade em intervalos arbitrários, sendo assim o grau de consonância de um intervalo ou acorde deve ser o grau de afabilidade do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos números envolvidos: d (a:b) = d (mmc(a,b)).

Euler utilizou números imaginários na função 2x para obter ondas que se tratava de uma determinada nota musical, descobrindo assim que cada nota depende das coordenadas do número imaginário a qual corresponde afirma SALTOY (2003).

Na sequência, Euler desenvolveu a função zeta, a qual utilizava para expressar algumas importantes propriedades dos números primos. Segundo SALTOY (2003), temos que ao misturar ao acaso os números imaginários com a função zeta de Euler, Riemann descobriu uma nova maneira de escutar os tons misteriosos dos números primos, era uma música que apenas matemáticos da época poderiam ouvir.

Conforme KNOBLOCH (2008), uma série de potência é um polinômio que continua até o infinito. A análise das funções transcendentais nada mais é que uma expansão natural da álgebra. A decomposição de polinômios em fatores pode ser aplicada às funções transcendentes que são equações de grau infinito, ao buscar dedução de uma fórmula para calcular essa série que Euler definiu a função zeta:

$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$ , se n for par.

Através dessa função foi possível tocar uma música que revelasse os segredos dos números primos de acordo com SALTOY (2003). As senóides criadas por essa função revelavam uma estrutura harmônica oculta. O som podia ser representado por um gráfico onde o eixo horizontal representava o tempo e o eixo horizontal representava o volume e a altura do som e cada momento. Ao reproduzir o gráfico escalonado que contava o número de primos da mesma forma, somou as alturas das funções de onda, derivando da paisagem zeta, assim ao serem tocadas ao mesmo tempo, tais ondas reproduziam o som dos números primos.

**Proposta de ensino de conteúdos matemáticos inseridos na Música.**

Propomos uma metodologia de ensino da matemática para os alunos da educação básica, quer seja em um trabalho sistemático ou esporádico, a exploração de 10 problemas em aula expositiva ou em forma de debates, os quais envolvam Matemática e Música sugeridos por PEREIRA (2013)[5].

Visamos mostrar a professores e alunos que é possível tornar o ensino de Matemática mais interessante. Não será explorado um assunto e sim daremos sugestões para que possam ser desenvolvidas atividades em sala de aula ou atividades extraclasse, assim despertando o professor para o tema aqui discutido e, a partir das ideias sugeridas, eles possam desenvolver suas próprias atividades, podendo até mesmo ser sugeridas por alunos. Este trabalho é importante também para que os alunos percebam algumas das inúmeras relações existentes entre a Matemática e a Música, tornando o seu ensino mais prazeroso, possibilitando maior aprendizagem.

Aqui sugerimos algumas vídeo-aulas que consideramos interessantes:

1. Matemática e Música partes 1 e 2, estes vídeos foram produzidos pela UNIVESP TV, ressalta o fato de que na antiguidade a Música era ensinada como uma ciência exata, mostrando a sua evolução ao longo da história, bem como os principais filósofos e matemáticos que tiveram grandes contribuições nessa área. Faz alusões acerca de assuntos diversos nos campos da Matemática e Música, abordando de forma dinâmica cada tema. Essas vídeo-aulas estão disponíveis nos seguintes links:

<https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8>

<https://www.youtube.com/watch?v=GFZngfZU6Yk>

---

[5] Veja dissertação completa em <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/5438/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Rafayane%20Barros%20Cabral%20-%202015.pdf>).

2. Matemática em toda parte, esse vídeo sugere algumas propostas para o ensino da Matemática de forma mais criativa.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Z93YDhKfgkc>

3. Arte e Matemática, estabelece paralelos entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada, Cinema e Teatro, Escultura e Pintura, e os diferentes tipos de música. Define algumas características do som. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8X53JhvHxO0>

4. Matemática da Música, coloca que a Música é um exercício de aritmética secreto, segundo Leibniz, filósofo e matemático, explorando músicas clássicas e populares para mostrar a presença da Matemática na Música.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=IV_SajId4XI>

Pode-se ainda explorar o editor de gráficos Geogebra na construção de gráficos relacionados aos sons e às funções trigonométricas, dessa forma os alunos puderam visualizar as funções no plano, em três dimensões ou através de animações[6].

**Considerações Finais**

A Matemática está em toda parte, nas artes, na construção, na natureza e em nosso cotidiano, no entanto observa-se que frequentemente pessoas com habilidades matemáticas demonstram interesse na Música.

Ao estudar Música, identifiquei a necessidade de haver uma compreensão significativa em Matemática, pois se o indivíduo apresenta algum déficit no aprendizado de Matemática, consequentemente terá dificuldades no aprendizado da Teoria Musical. Propomos um trabalho diferenciado envolvendo essas duas áreas, de modo que ao estudar Música, o aluno se interesse pela Matemática.

Ao desenvolver o projeto "Coral Escolar" onde trabalho, que teve duração de 2 anos, tive a oportunidade de ensinar um pouco de Teoria Musical aos alunos envolvidos no projeto, de forma que os próprios alunos observaram a proximidade entre música e a matemática. Pude observar também que alguns alunos com problemas de aprendizagem em matemática, melhoraram consideravelmente. Os alunos do projeto, de um modo geral, se mostraram mais concentrados e preparados para assumir determinadas responsabilidades.

A música é envolvente, e como a Matemática, está muito presente em nossas vidas, sendo apreciada pelos mais variados grupos étnicos, sociais e culturais.

[6] O Geogebra está disponível para download no site: https://www.geogebra.org/download

Ao realizar esse trabalho, observamos que há poucos estudos sobre o assunto, mesmo percebendo que desde muito antes Pitágoras essas conexões foram observadas, assim, o desenvolvimento de um trabalho sistemático ou em eventuais projetos, explorando este contexto Matemática/Música poderá trazer resultados surpreendentes.

**Referências Bibliográficas**


1. ABDOUNUR, O.J., **Matemática e música: O pensamento analógico na construção**. 3a edição, editora Escrituras, São Paulo - SP. 2003.
2. BASTIAN, H.G., **Música na escola, a contribuição do ensino da música no aprendizado e no convívio social da criança.** Editora Paulinas, São Paulo - SP, 2009.
3. [CAMARGOS, C.B.R., **Música e Matemática: A harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto - MG. 2010.
4. GARDNER, H., **Inteligências múltiplas: a teoria na prática**. Porto Alegre: Artmed, 1995, Reimpressão 2007.
5. JULIANI, J.P., **Matemática e Música.** Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP. 2003.
6. KNOBLOCH, E., Euler **transgressing limits: The in_nite and music theory, Quaderns d'Historia de l'Enginyeria** volum IX, Berlin, 2008.
7. LINCK, F.G., **Música e Matemática: experiências didáticas em dois diferentes contextos.** UFRS, Porto Alegre - RS, 2010.
8. MED, Bohumil, **Teoria da música**, 4ª edição, Editora Musimed, Brasília - DF - 1996.
9. MORAIS, Marcos Vinícius Gomes, **Álgebra dos Tons**, disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/... /MarcosViniciusGomesMorais.pdf>, acesso: 04/04/2018 às 18:04.
10. PAPADOPOULOS**, Athanase. Mathematics and group theory in music**,vol. II (ed. L. Ji, A. Papadopoulos and S.-T. Yau), H.. 2014.
11. PEREIRA, Marcos**, Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje**. UNIRIO. Rio de Janeiro - RJ. 2013.
12. SALTOY, Marcus du, **The Music of Prime**, Special Markets Department, HarperCollins Publishers, New York, - USA - 2003.